EXERCICE 26 :

$m(0) = 300$

(E) : $y' = -\frac{1}{5}y$

1) – a) les solutions de (E) sont les fonctions définies sur IR par : $f(x) = k.e^{-\frac{1}{5}x}$; $k \in IR$

b) $m(t) = k.e^{-\frac{t}{5}}$; $k \in IR$

$m(0) = 300 \Rightarrow k = 300$

d'où $m(t) = 300\, e^{-\frac{t}{5}} = 300\, e^{-0,2t}$

2) $m(t_0) = 150 \Leftrightarrow 300\, e^{-\frac{t_0}{5}} = 150$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{t_0}{5}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{t_0}{5} = -\text{Ln}2$

$\Leftrightarrow \boxed{t_0 = 5\,\text{Ln}2}$

3) $m(t) \leq 10^{-2} \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{5}} \leq \frac{1}{30000}$

$\Leftrightarrow -\frac{t}{5} \leq -\text{Ln}(30000) \Leftrightarrow t \geq 5\text{Ln}(30000)$

EXERCICE 27 :

$g(x) = \cos x - \sin x$

1) $g'(x) = -\sin x - \cos x$
$= -\sin(\pi - x) + \cos(\pi - x)$
$= \cos(\pi - x) - \sin(\pi - x)$
$= g(\pi - x)$

2) $f'(x) = f(\pi - x)$

a) * la fonction : $x \mapsto \pi - x$ est dérivable sur IR , comme f est dérivable sur IR , la fonction : $x \mapsto f(\pi - x)$ est dérivable sur IR par suite f ′ est dérivable sur IR
d'où f est deux fois dérivable sur IR

* $f'(x) = f(\pi - x) \Rightarrow f''(x) = -f'(\pi - x)$
$\Rightarrow f''(x) = -f[\pi - (\pi - x)]$
$\Rightarrow f''(x) = -f(x)$
$\Rightarrow f''(x) + f(x) = 0$

D'où f est solution de l'équation : $y'' + y = 0$

b) $f(x) = A\sin x + B\cos x$
$(A,B) \in IR^2$

EXERCICE 28 :

Partie A

(E) : $y' - 2y = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$

1) la solution de l'équation : $y' = 2y$ qui prend la valeur 1 en 0 est $h(x) = e^{2x}$

2) $f(0) = \text{Ln}2$
$f(x) = e^{2x}.g(x)$

a) $f(0) = e^0.g(0) \Rightarrow g(0) = f(0) = \text{Ln}2$

b) $f'(x) = 2e^{2x}.g(x) + e^{2x}.g'(x)$

$f'(x) = e^{2x}.[2g(x) + g'(x)]$

c) f est solution de (E)

$\Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$

$\Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$

$\Leftrightarrow 2e^{2x}.g(x) + e^{2x}.g'(x) - 2e^{2x}.g(x) = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$

$\Leftrightarrow e^{2x}.g'(x) = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$

$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

$\Leftrightarrow g(x) = \text{Ln}(1 + e^{-2x}) + k$; $k \in IR$

$g(0) = \text{Ln}2 \Rightarrow k = 0$

d'où : $g(x) = \text{Ln}(1 + e^{-2x})$

et $f(x) = e^{2x}\,\text{Ln}(1 + e^{-2x})$

Partie B

$f(x) = e^{2x}\,\text{Ln}(1 + e^{-2x})$

1) $h(x) = \text{Ln}(1 + e^{-2x}) - \frac{1}{e^{2x}+1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \text{Ln}(1 + e^{-2x}) - \frac{1}{e^{2x}+1}$ (0 ; 0 ; 1)

$= \text{Ln}\,1 = 0$

b) $h'(x) = \frac{-2}{(e^{2x}+1)^2} < 0$

h est strictement décroissante sur IR

Qarray.tn - Aqra Bled - Qarray.tn